

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ ВИБРАЦИОННОГО ПРОСЕИВАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И ИГЛОВИДНЫХ ЧАСТИЦ

На основі геометричної інтерпретації алгебри подій отримано формули для обчислення ймовірностей просіювання циліндричних та голкоподібних часток крізь щілинне сито, а також сита з прямокутними та квадратними отворами. Виконано порівняння ймовірностей просіювання циліндричних та сферичних часток.

**Введение.** При математическом моделировании процесса вибрационного грохочения для определения вероятности просеивания частиц широко используется формула Годена [1]. Важно отметить, что формула получена в предположении о сферической форме частиц, которая в практике грохочения встречается сравнительно редко. Применение формулы Годена для частиц иной формы приводит к существенным погрешностям. К этому необходимо добавить, что она не позволяет рассчитать вероятность просеивания удлиненных частиц через щелевое сито, размер отверстия которого меньше максимального размера частицы. В этой связи целью статьи является разработка аналитического метода определения вероятности просеивания цилиндрических и игловидных частиц через щелевое сито, а также сита с прямоугольными и квадратными отверстиями.

**Вероятность просеивания цилиндрических частиц через щелевое сито.** Введем систему координат. Щелевое сито образовано длинномерными элементами, которые расположены параллельно друг относительно друга. Выделим два соседних элемента. Одни из них назовем элемент 1, а другой – элемент 2. Ось  $y$  направим по кромке элемента 1, ограничивающей отверстие. При этом ось  $x$  проведем так, чтобы она проходила через центры элементов 1 и 2. Расстояние между элементами обозначим через  $L$ .

Вначале рассмотрим просеивание частиц через идеальное сито, т.е. сито, у которого нулевая ширина элементов. Математической моделью щелевого сита служат параллельные прямые.

Наблюдения за перемещениями цилиндрических частиц по ситу, у которых длина  $h$  больше диаметра  $d$ , позволяют сделать вывод о том, что вероятность перемещений частиц с ориентацией оси, параллельной ситу, значительно превосходит вероятность перемещений с нарушением параллельности. Таким образом, с достаточной для практики точностью примем, что проекцией частицы на плоскость сита является прямоугольник со сторонами  $h$  и  $d$ .

Положение частицы при падении на сито будем характеризовать координатами  $x$ ,  $y$  центра прямоугольника и углом  $\varphi$  между осью  $x$  и осью цилиндра. В качестве гипотезы примем, что их значения равновероятны, т.е. плотность ве-

роятности постоянна [1, 2].

Используем геометрическую интерпретацию вероятности [3]: вероятность наступления события есть отношение площади  $S$  области, благоприятствующей его появлению, к площади всей области  $S_0$  возможных событий

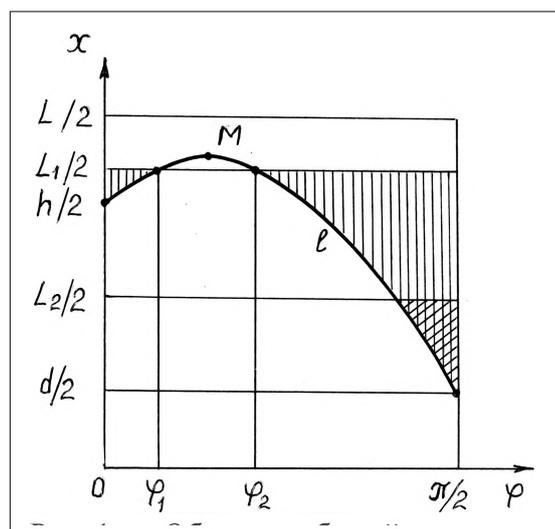
$$P = S/S_0. \quad (1)$$

Тот факт, что значения координат частицы равновероятны, позволяет ограничиться рассмотрением  $x$  на интервале от 0 до  $L/2$ , а  $\varphi$  – от 0 до  $\pi/2$ . Если учесть, что  $x$  и  $y$  независимы, а ширина щели существенно меньше ее длины, то площадь области, на которую возможно падение частицы, будет равна

$$S_0 = \pi L/4. \quad (2)$$

С изменением угла  $\varphi$  проекция прямоугольника на ось  $x$  меняется. С целью упрощения дальнейших вычислений будем рассматривать полупроекцию частицы, которая равна

$$\ell = \frac{1}{2}(h \cos \varphi + d \sin \varphi). \quad (3)$$



Характерный вид зависимости (3) приведен на рисунке 1.

Максимальная полупроекция (координата  $x$  точки  $M$ ) равна длине полудиagonали прямоугольника или радиусу  $D/2$  описанной окружности

$$\frac{D}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + d^2}.$$

Пересечение частицы с элементом 1 ( $x = 0$ ) не произойдет, т.е. частица просеется, если координата  $x$  будет соответствовать условию

$$\frac{L}{2} > x > \frac{L}{2} - \ell. \quad (4)$$

Вначале определим вероятность просеивания частицы, максимальный размер которой меньше размера щели, т.е.  $D < L$ .

Область значений  $x$  и  $\varphi$ , удовлетворяющих неравенству (4), ограничена кривой  $\ell(\varphi)$  и прямыми  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$  и  $L/2$ . Определим площадь этой области, которая является мерой события – частица просеется. Учитывая (3) и геометрический смысл определенного интеграла, имеем

$$S = \frac{\pi L}{4} - \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (h \cos \varphi + d \sin \varphi) d\varphi.$$

Интегрируя (а это не составляет труда, ибо интеграл является суммой табличных интегралов), находим

$$S = \frac{\pi L}{4} - \frac{1}{2}(h + d). \quad (5)$$

Подставляя (5) и (2) в (1) и переходя к безразмерным переменным, получим формулу для вероятности просеивания цилиндрической частицы через идеальное сито ( $D < L$ )

$$P_n = 1 - \frac{2\tilde{D}(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}}, \quad (6)$$

где  $\tilde{D} = D/L$  – относительный размер частицы;  $c = d/h$  – сжатие частицы.

Учтем влияние ширины элементов реального сита на вероятность просеивания частицы. Для этого выделим одно отверстие с ограничивающими его элементами, вдоль которых проведем осевые линии. Будем различать следующие случайные события:

$$\begin{aligned} A &= \left\{ \begin{array}{l} \text{частица попадает в область, ограниченную} \\ \text{осевыми линиями} \end{array} \right\}; \\ B &= \{ \text{частица попадает в отверстие} \}; \\ C &= \{ \text{частица проходит через отверстие} \}. \end{aligned}$$

Для просеивания частицы необходимо, чтобы, во-первых, произошло событие  $B$  и, во-вторых, должно произойти событие  $C$ .

Используя геометрическую интерпретацию вероятности, а также принимая во внимание, что плотность вероятности постоянна, получим вероятность наступления события  $B$

$$P(B) = S_1/S_2,$$

где  $S_1$  – площадь отверстия (мера события  $B$ );  $S_2$  – площадь, ограниченная осевыми линиями элементов (мера события  $A$ ). Эти площади равны

$$S_1 = L \cdot L_2; \quad S_2 = (L + \Delta)(L_2 + \Delta_2),$$

где  $L_2$  – больший размер отверстия;  $\Delta$  и  $\Delta_2$  – ширина элементов. Тогда

$$P(B) = \frac{L \cdot L_2}{(L + \Delta)(L_2 + \Delta_2)}.$$

Поскольку у щелевого сита  $L_2 \gg \Delta_2$ , то с достаточной для практики точностью примем

$$P(B) = \frac{L}{L + \Delta}.$$

В теории грохочения эта вероятность характеризуется коэффициентом  $\zeta$  живого сечения сита, т.е.

$$P(B) = \zeta. \quad (7)$$

На основании теоремы умножения вероятностей, а также учитывая, что  $P(C) = P_n$ , получим вероятность просеивания цилиндрической частицы через реальное сито

$$P = P(B)P(C) = \zeta P_n$$

или с учетом (6)

$$P = \zeta \left[ 1 - \frac{2\tilde{D}(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}} \right]. \quad (8)$$

Для определения вероятности просеивания игловидной частицы необходимо в этой и всех последующих формулах положить  $c = 0$ .

**Вероятность просеивания цилиндрических частиц граничной крупности через щелевое сито.** Частицами граничной крупности будем называть те частицы, у которых максимальный размер больше, а минимальный размер меньше ширины щели сита.

Определим вероятность просеивания частицы, размеры которой  $D > L$ , а  $h < L$ . Этому случаю соответствует прямая  $x = L_1/2$  (см. рис. 1). Вычислим площадь области, в пределах которой координаты  $x$  и  $\varphi$  удовлетворяют условию (4). Указанная область заштрихована вертикальными прямыми. Ее площадь равна

$$S = \frac{\pi L_1}{4} - \int_0^{\varphi_1} \ell(\varphi) d\varphi - \int_{\varphi_1}^{\pi/2} \ell(\varphi) d\varphi - \frac{L_1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (9)$$

Подстановка (3) в полученное выражение и интегрирование дают

$$S = \frac{\pi L_1}{4} - \frac{1}{2} [h(1 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2) + d(1 - \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)] - \frac{L_1}{2}(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (10)$$

Разделив  $S$  на (2) и перейдя к безразмерным переменным, а также умножив на  $\zeta$ , получим формулу для определения вероятности просеивания цилиндрической частицы при  $D > L$ ;  $h < L$ .

$$P = \zeta \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\tilde{D}}{\sqrt{1+c^2}} (F_1 + cF_2) + \varphi_2 - \varphi_1 \right] \right\}, \quad (11)$$

где

$$F_1 = 1 + \sin \varphi_1 - \sin \varphi_2;$$

$$F_2 = 1 - \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2.$$

Из рис. 1 следует, что для определения углов  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  необходимо решить уравнение

$$L_1 = h \cos \varphi + d \sin \varphi,$$

которое перепишем так

$$\sin \varphi + \frac{h}{d} \cos \varphi = \frac{L_1}{d}. \quad (12)$$

Решение трансцендентного уравнения (12) подробно описано в монографии [4]. Оно имеет следующий вид

$$\varphi_{1,2} = \arccos \frac{\frac{1}{\tilde{D}} \pm c \sqrt{1 - \frac{1}{\tilde{D}^2}}}{\sqrt{1 + c^2}}.$$

Условимся с индексом 1 записывать меньший угол.

Перейдем к определению вероятности просеивания частицы, у которой  $h > L$ . Этому случаю соответствует прямая  $x = L_2/2$  (см. рис. 1) Площадь области координат  $x$  и  $\varphi$ , при которых происходит просеивание, равна

$$S = \frac{\pi L_2}{4} - \int_{\varphi_2}^{\pi/2} \ell(\varphi) d\varphi - \frac{L_2}{2} \varphi_2. \quad (13)$$

Указанная область заштрихована наклонными прямыми.

Из сравнения выражений (13) и (9) видно, что (13) следует из (9), если в последнем выражении принять  $\varphi_1 = 0$ . На основании этого, подставляя в (11)  $\varphi_1 = 0$ , получим формулу для определения вероятности просеивания цилиндрической частицы, длина которой превышает ширину щели ( $h > L$ ),

$$P = \zeta \left\{ 1 - \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\tilde{D}}{\sqrt{1 + c^2}} (1 - \sin \varphi_2 + c \cdot \cos \varphi_2) + \varphi_2 \right] \right\}. \quad (14)$$

Результаты расчетов по формулам (8) и (14) приведены в таблице 1, а по формуле Годена представлены в табл. 2.

Таблица 1 – Вероятность просеивания цилиндрических частиц через щелевое сито при  $\zeta = 1$

$\tilde{D}$	$c$					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,8727	0,8502	0,8345	0,8253	0,8210	0,8199
0,4	0,7454	0,7004	0,6690	0,6506	0,6421	0,6399
0,6	0,6180	0,5505	0,5035	0,4759	0,4631	0,4598
0,8	0,4907	0,4007	0,3380	0,3013	0,2841	0,2797
1	0,3634	0,2509	0,1725	0,1266	0,1052	0,0997
1,5	0,2214	0,2068	0,1647	0,1037	0,0336	0,0000
2	0,1628	0,1406	0,0781	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица 2 – Вероятность просеивания сферических частиц через щелевое сито при  $\zeta = 1$

$\tilde{D}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$P$	0,8	0,6	0,4	0,2	0,0

Из сопоставления таблиц 1 и 2 следует, что при одинаковых относительных размерах  $\tilde{D}$  вероятность просеивания цилиндрических частиц выше вероятности просеивания сферических частиц. Это превышение  $\delta$  (%) возрастает с увеличением  $\tilde{D}$  и с уменьшением  $c$ . Так при варьировании  $\tilde{D}$  от 0,2 до 0,8 и  $c$  от 1 до 0,2  $\delta$  увеличивается с 2,5 до 145 %. При этом  $\delta$  можно рассматривать не только как меру превышения вероятности просеивания, но также и как погрешность, возникающую при замене цилиндрической частицы сферической. Таким

образом, при подобной замене в зависимости от  $\tilde{D}$  и  $c$  погрешность составляет от 2,5 до 145 %. Также необходимо отметить достаточно большую вероятность просеивания цилиндрических частиц, максимальный размер которых превосходит ширину щели (например,  $P = 0,2068$  при  $\tilde{D} = 1,5$ ;  $c = 0,2$ ), в то время как для сферических частиц она равна нулю. Эти выводы хорошо согласуются с результатами грохочения.

**Вероятность просеивания цилиндрических частиц через сита с прямоугольными и квадратными отверстиями.** Выделим одно прямоугольное отверстие сита. Оно ограничено продольными и поперечными элементами, которые ортогональны друг к другу. Практика свидетельствует о правомерности принятой в теории грохочения гипотезы: контакт частицы с одним из элементов не оказывает влияния на вероятность контакта с другим ортогональным к нему элементом. На основании этого мы вправе сделать вывод о независимости событий прохождения частицы между продольными и поперечными элементами и, следовательно, на основании теоремы умножения вероятностей записать, что вероятность просеивания частицы в прямоугольное отверстие равна

$$P_n = P_1 P_2, \quad (15)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – соответственно, вероятности просеивания частицы между продольными и поперечными элементами. Обратим внимание на то, что формула (15) справедлива для частицы любой формы. В то же время форма является определяющим фактором при вычислении  $P_1$  и  $P_2$ .

Подставляя выражение (8), записанное для продольных и поперечных элементов, в (15), получим вероятность просеивания цилиндрической частицы через сито с прямоугольными отверстиями.

$$P_n = \zeta_n \left[ 1 - \frac{2\tilde{D}_1(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}} \right] \cdot \left[ 1 - \frac{2\tilde{D}_2(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}} \right], \quad (16)$$

где  $\tilde{D}_1 = d/L_1$ ,  $\tilde{D}_2 = d/L_2$ ,  $L_1$  и  $L_2$  – соответственно, расстояние между продольными и поперечными элементами.

С учетом (7) коэффициент живого сечения равен

$$\zeta_n = \frac{L_1 \cdot L_2}{(L_1 + \Delta_1)(L_2 + \Delta_2)}, \quad (17)$$

где  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  – ширина продольных и поперечных элементов.

Если в (16) и (17) подставить  $L_1 = L_2 = L$  и  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta$ , то получим формулу для вероятности просеивания цилиндрической частицы через сито с квадратными отверстиями

$$P_k = \zeta_k \left[ 1 - \frac{2\tilde{D}(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}} \right]^2; \quad (18)$$

$$\zeta_k = \left( \frac{L}{L+\Delta} \right)^2; \quad \tilde{D} = d/L.$$

Формулы (8) и (18) могут быть объединены в одну

$$P = \zeta \left[ 1 - \frac{2\tilde{D}(1+c)}{\pi\sqrt{1+c^2}} \right]^\psi; \quad (19)$$

$$\zeta = \left( \frac{L}{L+\Delta} \right)^\psi,$$

где показатель степени  $\psi = 1$  для щелевого сита и  $\psi = 2$  – для сита с квадратными отверстиями.

Результаты расчетов, выполненных по формуле (19) представлены в табл. 3, а по формуле Годена приведены в табл. 4.

Таблица 3 – Вероятность просеивания цилиндрических частиц через сито с квадратными отверстиями при  $\zeta = 1$

$\tilde{D}$	$c$					
	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,2	0,7616	0,7228	0,6963	0,6811	0,6741	0,6723
0,4	0,5555	0,4905	0,4475	0,4233	0,4123	0,4094
0,6	0,3819	0,3031	0,2535	0,2265	0,2145	0,2114
0,8	0,2408	0,1606	0,1142	0,0908	0,0807	0,0783
1,0	0,1320	0,0629	0,03	0,0160	0,0111	0,0908

Таблица 4 – Вероятность просеивания сферических частиц через сито с квадратными отверстиями при  $\zeta = 1$

$\tilde{D}$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$P$	0,64	0,36	0,16	0,04	0,00

Из сравнения таблиц 3 и 4 следует такой же вывод, как и при анализе просеивания через щелевое сито, а именно: при одинаковых относительных размерах  $\tilde{D}$  вероятность просеивания цилиндрических частиц выше вероятности просеивания сферических частиц. Отличие заключается в значениях превышений  $\delta$ . При изменениях  $\tilde{D}$  от 0,2 до 0,8 и  $c$  от 1 до 0,2  $\delta$  увеличивается с 5 до 500 %. Следовательно, если для определения вероятности просеивания цилиндрических частиц пользуются формулой Годена для сферических частиц, то погрешность составляет от 5 до 500 %.

Из табл. 3 видно, что вероятности просеивания частиц при  $\tilde{D} = 1$  и  $c > 0,2$  достаточно малы и поэтому с практической точки зрения теряется смысл в рассмотрении случая  $\tilde{D}, h < L$ . Если же такая необходимость возникает, то тогда при умножении вероятностей (15) следует использовать выражение (14). Окончательный вид формулы не приводится из-за ее громоздкости.

#### Выводы.

1. На основании геометрической интерпретации вероятности получены формулы для вероятностей просеивания цилиндрических и игловидных частиц через щелевое сито, а также сита с прямоугольными и квадратными отверстиями.
2. Выведены формулы для вероятностей просеивания цилиндрических и игловидных частиц через щелевое сито, размер отверстия которого меньше максимального размера частицы.

3. При одинаковых относительных размерах частиц вероятности просеивания цилиндрических частиц через щелевое сито в зависимости от относительного размера и сжатия частиц превышает вероятность просеивания сферических частиц на 2,5÷150 %, а для сита с квадратными отверстиями это превышение достигает 500 %.
4. Если для определения вероятности просеивания цилиндрических частиц применяется формула Годена для сферических частиц, то в зависимости от крупности частиц, их сжатия, а также геометрии отверстий сита погрешность такой замены составляет 2,5-500 %.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайсберг Л.А., Рубисов Д.Г. Вибрационное грохочение сыпучих материалов: моделирование процесса и технологический расчет грохотов. - С.-П.: Механобр, 1994. - 47 с.
2. Лапшин Е.С. Аналитические определения вероятности просеивания эллипсоидных частиц через щелевое сито грохота // Геотехническая механика. -Днепропетровск. -2000. –Вып. 19. -С. 20-24.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностной. - М.: Радио и связь, 1983. - 416 с.
4. Кобринский А.Е., Кобринский А.А. Виброударные системы (Динамика и устойчивость). -М.: Наука, 1973. -592 с.

УДК 622.279:622.33(477.62)

А.П. Клец, В.В. Фичёв

### **МЕХАНИЗМ И УСЛОВИЯ ОБРАЗОВАНИЯ ВТОРИЧНЫХ СКОПЛЕНИЙ МЕТАНА УГОЛЬНЫХ МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

Запропоновано механізм та умови утворення вторинних накопичень метану вугільних родовищ після відроблення вугільних пластів. Приведені приклади вторинних газових накопичень у Донбасі.

Проницаемость угольных пластов, а, чаще всего, и песчаников Донбасса в нетронутом горными работами массиве почти нулевая, поэтому извлечение метана из них без стимулирования газоотдачи практически невозможно. Для целей добычи метана представляют интерес его вторичные скопления в пространстве горных пород, залегающих выше отработанных угольных пластов. При ведении очистных и подготовительных работ геодинамические процессы охватывают всю вышележащую толщу горных пород, иногда достигая земной поверхности в границах мульды сдвижения, площадь которой всегда больше площади выемки угольного пласта или породы [1]. В вышележащих породах образуется зона разрушения, зона трещинообразования, где в прогибающихся слоях образуются трещины полностью пересекающие слои примерно по нормали к напластованию, и третья зона, в которой горные породы расслаиваются прогибаясь без образования трещин. Размеры зон зависят от вынимаемой мощности пласта и площади выработанного пространства, глубины ведения горных работ и свойств пород вышележащей толщи, и, в особенности, от способа управления кровлей в очистных выработках. Методика их расчёта может быть